EL TEOREMA DE HELLY

Christian Edgar Laing Celestino (1)
Gil Bor (2)
(1) Facultad de Matematicas
Universidad Autonoma de Guanajuato
(2) Centro de Investigacion en Matematicas

1. **INTRODUCCION**
2. **EL TEOREMA DE HELLY EN EL PLANO**
3. **GENERALIZACIONES DEL TEOREMA DE HELLY**
4. **BIBIOGRAFIA**

INTRODUCTION

El Teorema de Helly constituye una importante herramienta en muchas áreas de Matematicas como son el Análisis, y la Geometría entre otros. Este, por su sencillez para proponerlo, y su importancia en la convexidad es de gran relevancia y digno de estudiar. La meta en esta investigación ha sido proponerlo, demostrarlo y tratar de extenderlo a otras dimensiones y trabajar además con una familia más grande de conjuntos.

EL TEOREMA DE HELLY EN EL PLANO

Definición: Un conjunto α es **convexo**, si para cualesquiera dos puntos de α, el segmento de línea comprendido por estos dos puntos esta totalmente contenido en α (fig. 1).

Tomemos *n* conjuntos convexos en el plano, tales que para cada tres de ellos tienen un punto en común. Entonces los *n* conjuntos tienen un punto en común.

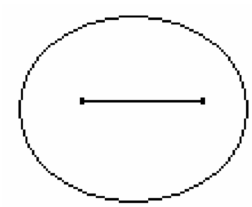

fig. 1

Demostración:
La prueba se desarrollará por inducción.
Para *n=4*, denotemos los cuatro conjuntos convexos por α_1, α_2, α_3 y α_4. Sean:

P_1 un punto en común de α_2, α_3 y α_4;
P_2 un punto en común de α_1, α_3 y α_4;
P_3 un punto en común de α_1, α_2 y α_4;
P_4 un punto en común de α_1, α_2 y α_3.

Luego, como P_1, P_2 y P_3 están en α_4, por ser éste convexo, se. tiene que el triángulo $\Delta P_1P_2P_3 \subset \alpha_4$. Análogamente, se tiene que $\Delta P_1P_3P_4 \subset \alpha_2$, $\Delta P_1P_2P_4 \subset \alpha_3$ y $\Delta P_2P_3P_4 \subset \alpha_1$ (fig. 2).

A continuación consideremos dos casos:

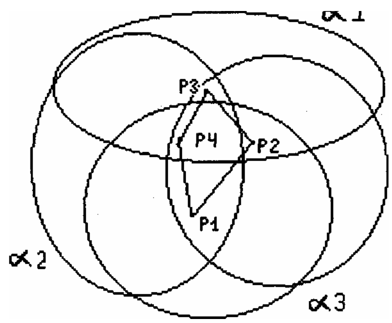

Fig. 2

Caso l.- Uno de los puntos esta contenido en el triángulo formado por los otros tres. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $P_1 \in \Delta P_2P_3P_4$ (fig. 3). En este caso, tenemos que $P_4 \in \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 \cap \alpha_4$, y el caso *n=4* queda demostrado. Esto también es válido si los puntos P_2, P_3 y P_4 estan alineados.

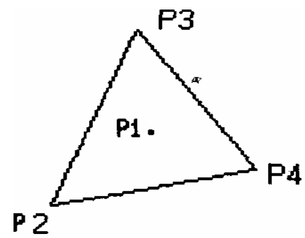

Fig. 3

Caso 2.- Ninguno de los puntos cae en el triángulo formado por los otros tres. Entonces se tiene que los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 forman un cuadrilátero convexo (fig. 4). Luego, tomando el punto O formado por la intersección de las diagonales, se observa que $O \in \Delta P_iP_jP_k$, $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$, *i, j, k=1...4*. Por lo tanto $O \in \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3 \cap \alpha_4$ y concluimos esta demostración para el caso *n=4*.

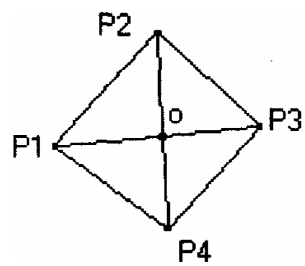

Fig. 4

Supongamos que el Teorema es cierto para *n-1* conjuntos, y lo demostraremos para n conjuntos. Sean α_1, $\alpha_2,...,\ \alpha_n$ n conjuntos convexos tales que cada tres de ellos tienen un punto en común. Denotemos por $\alpha = \alpha_{n-1} \cap \alpha_n$. Como la intersección de convexos es convexa, α es convexa, asi que tenemos una lista α_1, $\alpha_2,...,\ \alpha_{n-2}$, α de conjuntos convexos. A continuación, vamos a ver que se cumplen las hipótesis del Teorema de Helly para estos *n-1* conjuntos convexos. Cualesquiera tres conjuntos de α_1, $\alpha_2,...,\ \alpha_{n-2}$, por hipótesis, tienen un punto en común. Para estos conjuntos de la forma α_i, α_j, α, $(i, j = 1,..,n-2,\ i \neq j)$, su intersección es $\alpha_i \cap \alpha_j \cap \alpha_{n-1} \cap \alpha_n$. Sabemos que su intersección es no vacia, ya que acabamos de probar el Teorema de Helly para *4* conjuntos. Por lo tanto existe un punto común a estos. De aquí que cualesquiera tres conjuntos de α_1, $\alpha_2,...,\ \alpha_{n-2}$, α tienen un punto en común, y por hipótesis de inducción, todos tienen un punto en común. Queda demostrado el Teorema.

GENERALIZACIONES DEL TEOREMA DE HELLY

Sean α_1, $\alpha_2,...,\ \alpha_n$ conjuntos convexos en R^n. Supongamos que cada *n+1*, $n \geq 2$, conjuntos tienen un punto en común. Entonces todos tienen un punto en común.

Demostracion:

Aplicaremos el método de inducción a la dimensión y al número de conjuntos.

El caso en que la dimension es *2*, por la demostración anterior el resultado es claro. Supondremos que el teorema es valido para R^{n-1}, y se procederá a probarlo para R^n.

Análogo al caso en el plano, probaremos primero el teorema para *n+2* conjuntos.
Sean entonces $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+2}$ conjuntos. Con la propiedad de que cada *n+1* de ellos tienen un punto en común. Como cada *n+2* convexos de nuestra colección tienen un punto en común, existen:

$$\begin{aligned} &P_1 \in \alpha_2 \cap \alpha_3 \cap ... \cap \alpha_{n+1} \cap \alpha_{n+2}; \\ &P_2 \in \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap ... \cap \alpha_{n+1} \cap \alpha_{n+2}; \\ &\vdots \\ &P_{n+1} \in \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap ... \cap \alpha_n \cap \alpha_{n+2}; \end{aligned}$$

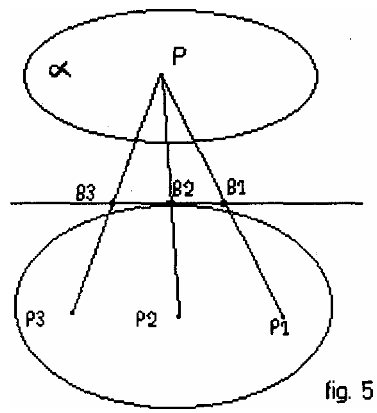

fig. 5

Denotemos por $\alpha = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \ldots \cap \alpha_{n+1}$.
Sea *P* un punto de α. Como $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$ son convexos, se tiene que los segmentos:

$$\begin{aligned} &\overline{PP_1} \subset \alpha_2 \cap \alpha_3 \cap \ldots \cap \alpha_{n+1}; \\ &\overline{PP_2} \subset \alpha_1 \cap \alpha_3 \cap \ldots \cap \alpha_{n+1}; \\ &\vdots \\ &\overline{PP_{n+1}} \subset \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \ldots \cap \alpha_n; \end{aligned}$$

Ver (fig. 5) para el caso del pliano.

Supongamos que α y α_{n+2} no tienen un punto en común, esto es, $\alpha \cap \alpha_{n+2} = \varnothing$, entonces existe un hiperplano *l* que los separa, con $l \cap \alpha_{n+2} \neq \varnothing$. Definimos el punto $B_1 = PP_1 \cap l$, $B_2 = PP_2 \cap l, ...,$ $B_{n+1} = PP_{n+1} \cap l$. El punto B_1 pertenece a $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n+1}$. Y de forma análoga, se comprueba la pertenencia de los demás puntos.

Luego, cada *n* figuras de $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$ tienen un punto en común con *l*. Como *1* intersecta a $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$ en conjuntos de dimensión *n-1*, por el Teorema de Helly para R^{n-1} se tiene que existe un punto *O* en *1* común a $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$. Lo cuál es una contradicción, ya que habiamos dicho que se podian separar. Por lo que los *n+2* conjuntos convexos tienen un punto en común. Hemos probado el teorema para un número finito de convexos.
Q.e.d.

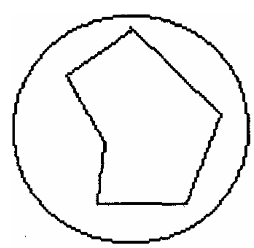
fig. 6

Para la segunda extension del Teorema de Helly daremos las siguientes definiciones.

Definición: Un conjunto α es **acotado** si existe una bola que contenga enteramente a α (fig. 6).

Diremos que α es un conjunto **cerrado** si este contiene a su frontera (fig. 1).

Sean α y β dos conjuntos ajenos en el piano, y sea *1* una línea en el plano. Se dice que **1 separa** α **y** β si los interiores de α y β caen en distintos lados de *1* (fig. 5).

Observación: En caso de que α y β sean conjuntos cerrados, la definición deja la posibilidad de que parte de la frontera de uno de ellos intersecte a *1*.

Teorema.- Si α y β son conjuntos convexos ajenos en el plano, existe una línea *1* que los separa.

Teorema (Propiedad de la intersección finita).- Sea *X* un conjunto cerrado y acotado en el plano. Entonces *X* tiene la siguiente propiedad:
Si $\{F_i\}$, $i \in I$, es una familia de cerrados de *X*, tal que para todo subconjunto $J \subset I$ finito con $\cap F_i \neq \emptyset$, $i \in J$, entonces $\cap F_i \neq \emptyset$, $i \in I$.

Nota: Las definiciones se pueden extender a cualquier dimensión facilmente.

Segunda extensión del Teorema de Helly.

Sean $\alpha_i, i \in I$, una familia infinita de conjuntos convexos y cerrados en R^n, con al menos uno de ellos acotado. Supongamos que cada *n+1* conjuntos tienen un punto en común. Entonces todos tienen un punto en común.

Por la demostración anterior se tiene que *n+2* figuras tienen un punto en común. Para concluir con lo deseado, bastará usar la propiedad de la intersección finita. Tomando como *X* el conjunto convexo que es acotado, definámoslo por α_k, y los $F_i = \alpha_i \cap \alpha_k$, $\alpha_i \neq \alpha_k$. Como $\cap \alpha_i \neq \emptyset$, $i \in J$ finito, concluimos que $\cap \alpha_i \neq \emptyset$, $i \in I$, es decir, existe un punto común a todos. Con esto probamos el teorema.
Q.e.d.

BIBLIOGRAFIA

Articulos

- Convexity, Proceedings of symposia in pure mathematics, 1961, Volume VII, Victor L. Klee, American Mathematical Society.

Libros

- Convex Figures, I.M. Yaglom and V. G. Boltianskii, 1951, Library of the Mathematical circle-volume 4.
- La cara oculta de la esferas, Luis Montejano Peimbert, 1997, Colección la Ciencia para todos, número 75.